

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2024,
Convocatoria ordinaria

[mentoor.es](https://www.mentoor.es)



Problema 1. Álgebra

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Se pide:

- Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .
- Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución.

Solución:

- Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

Para discutir el sistema, aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. Estudiamos los rangos de la matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A^*).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante de A para encontrar los valores críticos de m .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(m(-1) - (-1)(3)) - 1(2(-1) - (-1)(m-1)) + 1(2(3) - m(m-1)) \\ &= -(-m+3) - (-2+m-1) + (6-m^2+m) \\ &= m-3 - (m-3) + 6 - m^2 + m \\ &= m-3 - m+3 + 6 - m^2 + m \\ &= -m^2 + m + 6 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero:

$$\begin{aligned} -m^2 + m + 6 = 0 &\implies m^2 - m - 6 = 0 \\ m &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Los valores críticos son $m = 3$ y $m = -2$.

Caso 1: $m \neq 3$ y $m \neq -2$

En este caso, $|A| \neq 0$, por lo que $\text{Rg}(A) = 3$. Como la matriz ampliada A^* contiene a A , su rango también es 3.

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas}$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)** y tiene una única solución.

Caso 2: $m = 3$



Sabemos que $|A| = 0$, así que $\text{Rg}(A) < 3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo en A:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

Por tanto, $\text{Rg}(A) = 2$. Estudiamos el rango de A^* :

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Observamos que la Fila 2 y la Fila 3 son idénticas, por lo que una es linealmente dependiente de la otra. El rango de A^* no puede ser 3. Como contiene el menor de orden 2 no nulo de A, $\text{Rg}(A^*) = 2$.

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)** con infinitas soluciones.

Caso 3: $m = -2$

Sabemos que $|A| = 0$, así que $\text{Rg}(A) < 3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo en A:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-2) = 1 \neq 0$$

Por tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.

Estudiamos el rango de A^* :

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante del menor de orden 3 formado por las columnas 1, 3 y 4:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1(4 - 6) - 1(8 - 18) - 2(-2 - 3) = 2 - (-10) - 2(-5) = 2 + 10 + 10 = 22 \neq 0$$

Como existe un menor de orden 3 no nulo en A^* , $\text{Rg}(A^*) = 3$.

$$\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$$

El sistema es **Incompatible (S.I.)** y no tiene solución.

Resumen: S.C.D. si $m \neq 3, -2$; S.C.I. si $m = 3$; S.I. si $m = -2$.

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución.

El sistema es S.C.I. para $m = 3$. El sistema equivalente, eliminando la tercera ecuación (que es redundante), es:

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{cases}$$



Como el rango es 2, tenemos 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Convertimos una incógnita en un parámetro. Sea $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -x + y = 3 - \lambda \\ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones para eliminar z (ya hecho). Ahora resolvemos para x e y . Multiplicamos la primera ecuación por 2:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 6 - 2\lambda \\ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases}$$

Sumando las nuevas ecuaciones:

$$5y = 15 - \lambda \implies y = \frac{15 - \lambda}{5} = 3 - \frac{\lambda}{5}$$

Sustituimos y en la primera ecuación original:

$$-x + \left(3 - \frac{\lambda}{5}\right) = 3 - \lambda \implies -x = 3 - \lambda - 3 + \frac{\lambda}{5} \implies -x = -\frac{4\lambda}{5} \implies x = \frac{4\lambda}{5}$$

<p>La solución para $m = 3$ es: $\begin{cases} x = \frac{4\lambda}{5} \\ y = 3 - \frac{\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$</p>
--



Problema 2. Álgebra

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar el rango de A en función del parámetro real m .
- Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$.
- Para $m = 0$, calcular A^5 .

Solución:

- Estudiar el rango de A en función del parámetro real m .

El rango de A depende del valor de su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la segunda fila, que es la más sencilla:

$$|A| = m \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m(1 \cdot m - m \cdot m) = m(m - m^2) = m^2(1 - m).$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores críticos:

$$m^2(1 - m) = 0 \implies m = 0 \text{ o } m = 1.$$

Caso 1: $m \neq 0$ y $m \neq 1$

$|A| \neq 0$, por lo tanto, el rango de la matriz es 3. $\text{Rg}(A) = 3$.

Caso 2: $m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$, así que $\text{Rg}(A) < 3$. La segunda fila es nula. Buscamos un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.

Caso 3: $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$, así que $\text{Rg}(A) < 3$. La primera y tercera columnas son idénticas, por lo que son linealmente dependientes. Buscamos un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$



Por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\text{Rg}(A) = 3$. Si $m = 0$ o $m = 1$, $\text{Rg}(A) = 2$.

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$.

Para $m = -1$, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante: $|A| = (-1)^2(1 - (-1)) = 1(2) = 2$.

Como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} y podemos despejar X:

$$AX = B \implies A^{-1}AX = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B$$

Calculamos la inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$.

Matriz de adjuntos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta de la adjunta:

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1(1) - 3(0) - 1(0) & 1(0) - 3(1) - 1(0) \\ 0(1) - 2(0) - 0(0) & 0(0) - 2(1) - 0(0) \\ -1(1) + 1(0) - 1(0) & -1(0) + 1(1) - 1(0) \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



c) Para $m = 0$, calcular A^5 .

Para $m = 0$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos las primeras potencias para buscar un patrón.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que para cualquier potencia $n \geq 2$, $A^n = A^2$.

$$\boxed{A^5 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 3. Geometría

Se considera la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi : 3x - my + z = 1$. Se pide:

- Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los cuales el plano π contiene la recta r .
- Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga la recta r .
- Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$.

Solución:

- a) **Estudiar paralelismo y contenencia.**

De la ecuación de la recta r , obtenemos un punto $P_r(1, -1, -2)$ y su vector director $\vec{v}_r = (2, 3, -1)$. De la ecuación del plano π , obtenemos su vector normal $\vec{n}_\pi = (3, -m, 1)$.

Paralelismo:

Para que la recta r y el plano π sean paralelos, el vector director de la recta \vec{v}_r debe ser perpendicular al vector normal del plano \vec{n}_π . Su producto escalar debe ser cero.

$$\begin{aligned}\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi &= 0 \\ (2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) &= 2(3) + 3(-m) + (-1)(1) = 6 - 3m - 1 = 5 - 3m \\ 5 - 3m &= 0 \implies 3m = 5 \implies m = 5/3\end{aligned}$$

La recta y el plano son paralelos si $m = 5/3$.

Contenencia:

Para que el plano contenga a la recta, primero deben ser paralelos ($m = 5/3$). Además, un punto de la recta, como $P_r(1, -1, -2)$, debe pertenecer al plano π .

Sustituimos P_r en la ecuación de π con $m = 5/3$:

$$\begin{aligned}3x - \frac{5}{3}y + z &= 1 \\ 3(1) - \frac{5}{3}(-1) + (-2) &= 1 \implies 3 + \frac{5}{3} - 2 = 1 \implies 1 + \frac{5}{3} = 1 \implies \frac{5}{3} = 0\end{aligned}$$

Esto es falso. Por lo tanto, el punto P_r no está en el plano. No existe ningún valor de m para el que el plano π contenga a la recta r .

Son paralelos para $m = 5/3$. No existe m para que π contenga a r .

- b) **Hallar un plano paralelo a π que contenga a r .**

El valor de m para el que son paralelos es $m = 5/3$. Un plano π' paralelo a π tendrá el mismo vector normal $\vec{n}_\pi = (3, -5/3, 1)$, por lo que su ecuación será de la forma $3x - \frac{5}{3}y + z + D = 0$.

Para que este plano π' contenga a la recta r , debe contener a un punto de la recta, por ejemplo, $P_r(1, -1, -2)$.

Sustituimos el punto en la ecuación de π' :

$$\begin{aligned}3(1) - \frac{5}{3}(-1) + (-2) + D &= 0 \\ 3 + \frac{5}{3} - 2 + D &= 0 \implies 1 + \frac{5}{3} + D = 0 \implies \frac{8}{3} + D = 0 \implies D = -\frac{8}{3}\end{aligned}$$



La ecuación del plano es $3x - \frac{5}{3}y + z - \frac{8}{3} = 0$. Multiplicando por 3 para simplificar: $9x - 5y + 3z - 8 = 0$.

$$\boxed{\text{El plano buscado es } \pi' \equiv 9x - 5y + 3z - 8 = 0.}$$

c) Calcular la distancia de π al punto $P(1,-1,-2)$.

El punto P es el mismo que el punto P_r de la recta r. La distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ se calcula con la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

El plano es $\pi : 3x - my + z - 1 = 0$ y el punto $P(1, -1, -2)$.

$$d(P, \pi) = \frac{|3(1) - m(-1) + 1(-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}} = \frac{|3 + m - 2 - 1|}{\sqrt{9 + m^2 + 1}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}} \text{ud}$$

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}} \text{ud}}$$

Problema 4. Geometría

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2, 1, 3)$ y $Q = (1, 3, 1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4, 7, 6)$. Se pide:

- Calcular la ecuación de la recta r .
- Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.
- Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

Solución:

- Calcular la ecuación de la recta r .

Sean los vértices del cuadrado P, Q, S, T .

Como P y Q son consecutivos, el lado PQ es uno de los lados. Los otros dos vértices, S y T , están en la recta r .

La recta que contiene el lado ST debe ser paralela a la recta que contiene el lado PQ .

El vector director del lado PQ es $\vec{PQ} = Q - P = (1 - 2, 3 - 1, 1 - 3) = (-1, 2, -2)$.

La recta r debe ser paralela a PQ , por lo que su vector director \vec{v}_r puede ser \vec{PQ} .

La recta r pasa por $R(4, 7, 6)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = (-1, 2, -2)$.

Su ecuación paramétrica es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$$

- Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

El plano π que contiene al cuadrado debe contener los puntos P, Q y la recta r (y por tanto, el punto R).

Podemos definir el plano con el punto $P(2, 1, 3)$ y dos vectores directores: $\vec{PQ} = (-1, 2, -2)$ y $\vec{PR} = R - P = (4 - 2, 7 - 1, 6 - 3) = (2, 6, 3)$.

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 2)(6 - (-12)) - (y - 1)(-3 - (-4)) + (z - 3)(-6 - 4) = 0$$

$$18(x - 2) - 1(y - 1) - 10(z - 3) = 0$$

$$18x - 36 - y + 1 - 10z + 30 = 0$$

$$18x - y - 10z - 5 = 0$$

$$\pi \equiv 18x - y - 10z - 5 = 0$$

- Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

Los vértices S y T están en la recta r . Sea S un punto genérico de r : $S(4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda)$.

El lado QS debe ser perpendicular al lado PQ . Por tanto, su producto escalar es cero: $\vec{QS} \cdot \vec{PQ} = 0$.



$$\vec{QS} = S - Q = (4 - \lambda - 1, 7 + 2\lambda - 3, 6 - 2\lambda - 1) = (3 - \lambda, 4 + 2\lambda, 5 - 2\lambda). \quad \vec{PQ} = (-1, 2, -2).$$

$$(3 - \lambda)(-1) + (4 + 2\lambda)(2) + (5 - 2\lambda)(-2) = 0$$

$$-3 + \lambda + 8 + 4\lambda - 10 + 4\lambda = 0$$

$$9\lambda - 5 = 0 \implies \lambda = 5/9$$

Sustituimos $\lambda = 5/9$ para encontrar el vértice S:

$$S = \left(4 - \frac{5}{9}, 7 + 2\frac{5}{9}, 6 - 2\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$

El cuarto vértice T se puede hallar con la relación vectorial $\vec{PT} = \vec{QS}$.

$$T = P + \vec{QS}$$

Calculamos \vec{QS} con $\lambda = 5/9$:

$$\vec{QS} = \left(3 - \frac{5}{9}, 4 + 2\frac{5}{9}, 5 - 2\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{22}{9}, \frac{46}{9}, \frac{35}{9}\right)$$

$$T = (2, 1, 3) + \left(\frac{22}{9}, \frac{46}{9}, \frac{35}{9}\right) = \left(\frac{18 + 22}{9}, \frac{9 + 46}{9}, \frac{27 + 35}{9}\right) = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

Comprobación alternativa: $\vec{ST} = T - S = \left(\frac{9}{9}, \frac{-18}{9}, \frac{18}{9}\right) = (1, -2, 2)$, que es $-\vec{PQ}$. Así que es correcto.

Los vértices son $S = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$ y $T = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$.



Problema 5. Análisis

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ en que k es un parámetro real. Se pide:

- Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.
- Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

- Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

Dominio:

La función es un cociente. El denominador es e^{2x} . Como la función exponencial nunca es cero, el denominador nunca se anula. Por tanto, el dominio es todo el conjunto de los números reales. $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Asíntotas Verticales:

No existen, ya que el dominio es \mathbb{R} .

Asíntotas Horizontales:

Estudiamos los límites en $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{2e^{2x}} = \frac{k}{+\infty} = 0.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} kxe^{-2x} = k(-\infty)e^{+\infty} = -\infty \cdot (\text{signo de } k)$$

El límite es infinito, por lo que no hay asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

Asíntotas Oblicuas:

Estudiamos si existe asíntota oblicua $y = mx + n$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx/e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \frac{k}{0^+} = +\infty \cdot (\text{signo de } k)$$

Como m no es un número real finito, no hay asíntota oblicua.

Dominio: \mathbb{R} . Asíntota horizontal $y = 0$ (cuando $x \rightarrow +\infty$). No hay más asíntotas.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Calculamos la primera derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{k \cdot e^{2x} - kx \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{ke^{2x}(1 - 2x)}{e^{4x}} = \frac{k(1 - 2x)}{e^{2x}}$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la derivada a cero. El denominador e^{2x} es siempre positivo.

$$f'(x) = 0 \implies k(1 - 2x) = 0.$$

Si $k = 0$, la función es $f(x) = 0$, que es constante.

Si $k \neq 0$, entonces $1 - 2x = 0 \implies x = 1/2$.

Estudiamos el signo de $f'(x)$ dependiendo del signo de k .

Caso 1: $k > 0$ El signo de $f'(x)$ depende de $(1 - 2x)$.

– Si $x < 1/2$, $(1 - 2x) > 0 \implies f'(x) > 0 \implies f(x)$ es creciente.

– Si $x > 1/2$, $(1 - 2x) < 0 \implies f'(x) < 0 \implies f(x)$ es decreciente.

En $x = 1/2$ hay un máximo relativo. $f(1/2) = \frac{k(1/2)}{e^{2(1/2)}} = \frac{k}{2e}$.

Caso 2: $k < 0$ El signo de $f'(x)$ es el opuesto de $(1 - 2x)$.

– Si $x < 1/2$, $(1 - 2x) > 0 \implies f'(x) < 0 \implies f(x)$ es decreciente.

– Si $x > 1/2$, $(1 - 2x) < 0 \implies f'(x) > 0 \implies f(x)$ es creciente.

En $x = 1/2$ hay un mínimo relativo. $f(1/2) = \frac{k}{2e}$.

Si $k > 0$: Creciente en $(-\infty, 1/2)$, Decreciente en $(1/2, +\infty)$. Máximo en $(1/2, k/2e)$.

Si $k < 0$: Decreciente en $(-\infty, 1/2)$, Creciente en $(1/2, +\infty)$. Mínimo en $(1/2, k/2e)$.

Si $k = 0$: Constante en \mathbb{R} .

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$.

Para que la función se anule, debemos resolver $f(x) = 0$.

$$\frac{kx}{e^{2x}} = 0$$

Como e^{2x} nunca es cero, la ecuación se reduce a $kx = 0$.

– Si $k \neq 0$, la única solución es $x = 0$.

– Si $k = 0$, la función es $f(x) = 0$ para todo x .

En ambos casos, la función se anula en $x = 0$. Dado que el punto $x = 0$ pertenece al intervalo $[-1, 1]$, queda justificado que la función siempre se anula en un punto de dicho intervalo.

Alternativamente, por el Teorema de Bolzano: $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$.

Si $k \neq 0$: $f(-1) = -ke^2$ y $f(1) = k/e^2$. Estos dos valores tienen signos opuestos. Por Bolzano, existe al menos un $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

La función se anula en $x = 0$, y como $0 \in [-1, 1]$, siempre se anula en el intervalo.

Problema 6. Análisis

Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R . Obtener el valor de a que cumple que el área compresa entre estas gráficas es igual a un tercio del área de R .

Solución:

Paso 1: Calcular el área del rectángulo R .

El rectángulo tiene una base de $1 - (-1) = 2$ y una altura de $1 - 0 = 1$.

Área de $R = 2 \times 1 = 2$ unidades cuadradas.

Un tercio del área de R es $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$.

Paso 2: Plantear el área entre las curvas.

El área comprendida entre $y = a$ y $y = x^2$ está limitada por los puntos de intersección de ambas curvas.

$$x^2 = a \implies x = \pm\sqrt{a}$$

Como $0 < a < 1$, los puntos de corte están en $(-1, 1)$, dentro del rectángulo.

La función $y = a$ es una recta horizontal que está por encima de la parábola $y = x^2$ en el intervalo $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$. El área se calcula mediante la integral definida:

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx$$

Paso 3: Calcular la integral.

Dado que la función $a - x^2$ es par, podemos simplificar el cálculo:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2 \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} \\ &= 2 \left(\left(a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right) - (0 - 0) \right) \\ &= 2 \left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right) = 2 \left(\frac{2a\sqrt{a}}{3} \right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3} \end{aligned}$$

También podemos escribir $a\sqrt{a}$ como $a^{3/2}$. El área es $\frac{4}{3}a^{3/2}$.

Paso 4: Igualar áreas y resolver para a .

Igualamos el área calculada a un tercio del área del rectángulo.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}a^{3/2} &= \frac{2}{3} \\ 4a^{3/2} &= 2 \implies a^{3/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para despejar a , elevamos ambos lados a la potencia $2/3$:



$$(a^{3/2})^{2/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \implies a = \frac{1^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$

Problema 7. Probabilidad

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0,6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados. Se pide:

- a) Elegimos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la retornamos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.
 1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?
 2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?
- b) Se elige al azar una moneda de la bolsa, se lanza dos veces y se observan dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .

Solución:

Definición de sucesos:

M_1 : Elegir la moneda 1. $P(M_1) = 1/2$.

M_2 : Elegir la moneda 2. $P(M_2) = 1/2$.

C: Obtener Cara. X: Obtener Cruz.

$P(C|M_1) = 0.6 \implies P(X|M_1) = 1 - 0.6 = 0.4$.

$P(C|M_2) = 1 \implies P(X|M_2) = 0$.

- a) **Tres lanzamientos con reposición.**

Primero, calculamos la probabilidad total de obtener Cara y Cruz en un lanzamiento.

$$P(C) = P(C|M_1)P(M_1) + P(C|M_2)P(M_2) = (0.6)(0.5) + (1)(0.5) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$P(X) = 1 - P(C) = 1 - 0.8 = 0.2$$

1. **Probabilidad de obtener tres caras (CCC).** Como los lanzamientos son independientes, la probabilidad es:

$$P(C \cap C \cap C) = P(C)^3 = (0.8)^3 = 0.512$$

$$\boxed{P(3 \text{ Caras}) = 0.512}$$

2. **Probabilidad de obtener exactamente una cruz.** Esto es un experimento de Bernoulli con $n = 3$ (lanzamientos) y éxito="obtener cruz". La probabilidad de éxito es $p = P(X) = 0.2$. Buscamos $P(k = 1)$.

$$P(1 \text{ Cruz}) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^{3-1} = 3 \cdot (0.2)^1 \cdot (0.8)^2 = 3 \cdot 0.2 \cdot 0.64 = 0.384$$

$$\boxed{P(1 \text{ Cruz}) = 0.384}$$

b) Probabilidad a posteriori (Teorema de Bayes).

Sea el suceso $D = \text{"Observar dos caras en dos lanzamientos de la moneda elegida"}$.

Buscamos $P(M_1|D)$ y $P(M_2|D)$.

Calculamos las probabilidades condicionadas de D :

$$P(D|M_1) = P(C|M_1) \cdot P(C|M_1) = (0.6)^2 = 0.36$$

$$P(D|M_2) = P(C|M_2) \cdot P(C|M_2) = (1)^2 = 1$$

Calculamos la probabilidad total de D usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2) = (0.36)(0.5) + (1)(0.5) = 0.18 + 0.5 = 0.68.$$

Ahora aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1)P(M_1)}{P(D)} = \frac{0.18}{0.68} = \frac{18}{68} = \frac{9}{34} \approx 0.2647$$

$$P(M_2|D) = \frac{P(D|M_2)P(M_2)}{P(D)} = \frac{0.5}{0.68} = \frac{50}{68} = \frac{25}{34} \approx 0.7353$$

Comprobamos que $P(M_1|D) + P(M_2|D) = 9/34 + 25/34 = 34/34 = 1$.

La probabilidad de que sea M_1 es $9/34$. La de que sea M_2 es $25/34$.



Problema 8. Probabilidad

Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas. Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación. Se pide:

- Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas.
- Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.
- Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

Solución:

Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de ventas en 10 llamadas.

La probabilidad de "no venta" es 0.3. Por tanto, la probabilidad de "venta" es $p = 1 - 0.3 = 0.7$.

X sigue una distribución Binomial, $X \sim B(n = 10, p = 0.7)$.

La tabla proporcionada es para $p \leq 0.5$. Para usarla, definimos una nueva variable Y que cuente el número de "no ventas". $Y \sim B(n = 10, p = 0.3)$. La tabla da valores de $F(k) = P(Y \leq k)$.

- Probabilidad de conseguir más de 7 ventas.**

$$P(x > 7) = P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$$

$$P(x > 7) = \binom{10}{8} \cdot 0.7^8 \cdot 0.3^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.7^9 \cdot 0.3^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3^0$$

$$P(x > 7) = 0.3828$$

$$\boxed{P(X > 7) = 0.3828}$$

- Probabilidad de conseguir al menos 5 ventas.**

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &= \binom{10}{5} \cdot 0.7^5 \cdot 0.3^5 + \binom{10}{6} \cdot 0.7^6 \cdot 0.3^4 + 0.3828 = 0.9527 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geq 5) = 0.9527}$$

- Probabilidad de conseguir un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.**

$$P(3 \leq X \leq 8).$$

$$\begin{aligned}
 P(3 \leq X \leq 8) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 9) + P(X = 10)] \\
 &= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^8 \right. \\
 &\quad \left. + \binom{10}{9} \cdot 0.7^9 \cdot 0.3^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3^0 \right] \\
 &= 0.8491
 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(3 \leq X \leq 8) = 0.8491}$$